ΜΕΡΟΣ ΤΡΙΤΟ

ΜΑΚΡΟΠΡΟΘΕΣΜΕΣ ΣΥΝΑΛΛΑΓΕΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΕΝΔΕΚΑΤΟ

ΑΝΑΤΟΚΙΣΜΟΣ ή ΣΥΝΘΕΤΟΣ ΤΟΚΟΣ

11.1 Γενικά

Η ιστορία του ανατοκισμού πηγαίνει πίσω στο παρελθόν αρκετές χιλιάδες χρόνια και τουλάχιστον μέχρι τους Βαβυλώνιους. Βέβαια, η πιο σπουδαία άσκηση ανατοκισμού ήταν η πώληση του νησιού του Manhattan της Νέας Υόρκης. Στις 24 Μαΐου του 1626 ο Peter Minuit, ο διευθυντής της ολλανδικής εταιρείας των Δυτικών Ινδιών, αντάλλαξε το νησί του Manhattan με κρεβάτια και χάντρες αξίας 6 guilders – περίπου \$ 24 – με τους ινδιάνους Lenape.

Εδώ μπορεί να ρωτήσει κανείς: Ήταν συμφέρουσα η ανταλλαγή που πραγματοποίησε ο Minuit;

Αν ο διευθυντής της εταιρείας των Δυτικών Ινδιών τοποθετούσε τα \$ 24 σε μια τράπεζα με επιτόκιο 8% και ετήσιο ανατοκισμό, για 384 χρόνια (1626 – 2010), σήμερα η αξία αυτών των \$ 24 θα ήταν

\$ 164.033.801.073.225,62

Ναι, 164 τρισεκατομμύρια δολάρια, ποσό που είναι σαφώς μεγαλύτερο από τη σημερινή αξία των 31 τετραγωνικών μιλίων του Manhattan.

Ο Benjamin Franklin (1706 – 1790) ήταν ένας από τους θεμελιωτές του αμερικάνικου έθνους, υπήρξε συγγραφέας, πολιτικός, διπλωμάτης και εφευρέτης. Το 1785, ο Γάλλος μαθηματικός C. J. Mathon de la Cour έγραψε μια παρωδία για το βιβλίο του Franklin *Το αλμανάκ του φτωχού Ρίτσαρντ*. Ο Γάλλος έδωσε τίτλο στην παρωδία του *Ο τυχερός Ρίτσαρντ* και στην προσπάθειά του να περιπαίξει την αμερικάνικη αισιοδοξία που εξέφραζε ο Franklin, έγραψε ότι *Ο τυχερός Ρίτσαρντ* άφησε ένα μικρό ποσό χρημάτων στη διαθήκη του που θα έπρεπε να χρησιμοποιηθεί μόνον αφού θα είχε συγκεντρώσει τόκους για 500 χρόνια. Ο Franklin θεώρησε την ιδέα του de la Cour φανταστική και αποφάσισε να αφήσει ένα κληροδότημα £ 1.000 – περίπου \$ 4.550 την εποχή του θανάτου του Franklin ή σε τιμές 2008, \$ 108.000 – σε καθεμιά από τις αγαπημένες του πόλεις, την Βοστώνη και την Φιλαδέλφεια, με τον όρο ότι το ποσό θα ανατοκίζονταν για 200 χρόνια. Μετά από 100 χρόνια, κάθε πόλη μπορούσε να αποσύρει \$ 500.000 από το κεφάλαιο που θα δημιουργούνταν, για τη χρηματοδότηση δημόσιων έργων. Το υπόλοιπο ποσό θα ανατοκίζονταν για άλλα 100 χρόνια. Ποια θα ήταν η τελική αξία του κεφαλαίου των $ 4.550 στο τέλος των 200 ετών;

$ 20.000.000 για κάθε πόλη.

Αυτή είναι η δύναμη του ανατοκισμού, για τον οποίο ο A. Einstein φέρεται να είπε ότι αποτελεί την πιο ισχυρή δύναμη του σύμπαντος και ότι αποτελεί το ένατο θαύμα του κόσμου.

Ο ανατοκισμός μπορεί να δουλέψει για εσάς ή εναντίον σας. Όταν επενδύετε δουλεύει για σας. Όταν δανείζεστε δουλεύει εναντίον σας.

Από νομικής πλευράς θα πρέπει να αναφερθεί ότι ο ανατοκισμός στη χώρα μας απαγορεύτηκε με νόμο του 1882 και επιτρέπεται μόνο σε κάποιες περιπτώσεις. Βέβαια, είναι γνωστό το θέμα της αυθαιρεσίας των ελληνικών τραπεζών που είχαν επιβάλλει πανωτόκια – τόκοι επί των τόκων – ύψους 24 τρις δραχμών από το 1980 έως το 2003. Υπολογίζεται, για παράδειγμα, ότι το 82% της αγροτικής γης στη χώρας μας αντιμετωπίζει προβλήματα είτε υποθήκευσης είτε κατάσχεσης. Ήρθε, όμως, ο Άρειος Πάγος να βάλλει τέλος στο σίριαλ των πανωτοκίων με την απόφαση 1119/2002 λύνοντας δυο σημαντικά θέματα: α) την παράνομη «αναγνώριση» των οφειλών από πανωτόκια, υπό την απειλή πλειστηριασμών και β) τον καθαυτό θεσμό των πανωτοκίων.

Ας δούμε, όμως, τώρα τον ανατοκισμό από την πλευρά των οικονομικών μαθηματικών.

Στο πρώτο κεφάλαιο αυτού του βιβλίου αναφερόμενοι στον **απλό τόκο** είπαμε ότι είναι εκείνος ο τόκος που στο τέλος κάθε χρονικής περιόδου <u>εισπράττεται</u> από τον καταθέτη, που αφήνει το αρχικό του κεφάλαιο να τοκίζεται και τη δεύτερη περίοδο και την τρίτη κ. ο. κ. ενώ

Στον **ανατοκισμό** ή τον **σύνθετο τόκο**, ο καταθέτης δεν εισπράττει τον τόκο στο τέλος της περιόδου, αλλά τον αφήνει να προστεθεί στο κεφάλαιο, να κεφαλαιοποιηθεί, οπότε στην επόμενη χρονική περίοδο ένα νέο κεφάλαιο (το αρχικό κεφάλαιο συν οι τόκοι της περιόδου θα αρχίσει να παράγει τόκο και αυτό θα επαναλαμβάνεται μέχρι τη λήξη της κατάθεσης.

Συμπερασματικά, στον απλό τόκο, ο τόκος και το αρχικό κεφάλαιο παραμένουν αμετάβλητα, ενώ, στον ανατοκισμό τόσο ο τόκος όσο και το κεφάλαιο αυξάνονται από περίοδο σε περίοδο.

Περίοδος στον ανατοκισμό, ανάλογα με τη συμφωνία των δυο μερών, μπορεί να είναι το έτος, το εξάμηνο, το τρίμηνο ή ο μήνας.

Το ποσό της αρχικής κατάθεσης ονομάζεται **αρχικό κεφάλαιο** ή **αρχική αξία**, ενώ το ποσό που εισπράττεται στο τέλος της **n** περιόδου λέγεται **τελική αξία**.

Διάρκεια ανατοκισμού, ονομάζεται ο συνολικός χρόνος που ένα κεφάλαιο ανατοκίζεται.

Εύρεση του τύπου του ανατοκισμού.

Αν συμβολίσουμε ως:

K_0 : το αρχικό κεφάλαιο

K_n : την τελική αξία

n : τον αριθμό των περιόδων ανατοκισμού και

i : το επιτόκιο

τότε σύμφωνα με τον ορισμό του ανατοκισμού θα έχουμε:

στο τέλος της πρώτης περιόδου

$$K_1 = K_0 + K_0 1i = K_0(1+i)$$

Στο τέλος της δεύτερης περιόδου

$$K_2 = K_0(1+i) + K_0(1+i)i = K_0(1+i)(1+i) = K_0(1+i)^2$$

Και στο τέλος της νιοστής περιόδου

$$K_n = K_0(1+i)^{n-1} + K_0(1+i)^{n-1}i = K_0(1+i)^n => \boldsymbol{K_n = K_0(1+i)^n} \quad \mathbf{(1)}$$

Παρατηρήσεις:

1. Η τιμή του διωνύμου (1 + i)^n που αναφέρεται σε διάφορα επιτόκια (i) τα οποία αντιστοιχούν σε συγκεκριμένο αριθμό περιόδων (n) ονομάζεται **συντελεστής κεφαλαιοποίησης** και δίδεται από τους οικονομικούς πίνακες στο τέλος του βιβλίου.
2. Όταν λύνουμε προβλήματα ανατοκισμού και χρησιμοποιούμε τον τύπο (1), προϋποτίθεται ότι το επιτόκιο (i) παραμένει σταθερό καθ' όλη τη διάρκεια των n περιόδων.
3. Αν το ζητούμενο επιτόκιο δεν είναι συνηθισμένο και επομένως δεν βρίσκεται στους οικονομικούς πίνακες, τότε για να βρούμε την τιμή του διωνύμου εφαρμόζουμε τη μέθοδο της παρεμβολής.
4. Αν, για παράδειγμα, ο ανατοκισμός είναι τριμηνιαίος θα πρέπει τότε το επιτόκιο (i) να είναι επίσης τριμηνιαίο και στην περίπτωση που το επιτόκιο είναι τριμηνιαίο και ο ανατοκισμός αναφέρεται σε έτη, τότε θα πρέπει τα έτη να μετατραπούν σε τρίμηνα.

Εκτός από τη βοήθεια των οικονομικών πινάκων, μπορούμε να λύσουμε τα προβλήματα του ανατοκισμού με τους λογαρίθμους. Ο τύπος $K_n = K_0 (1 + i)^n$ για την εύρεση της τελικής αξίας γίνεται:

$\log K_n = \log K_0 + n\log (1 + i)$

Για να βρεθεί η αρχική αξία

$$logK_0 = logK_n - nlog(1+i)$$

Για να βρεθεί ο χρόνος

$$n = \frac{logK_n - logK_0}{\log\,(1+i)}$$

Για να βρεθεί το επιτόκιο

$$\log(1+i) = \frac{logK_n - logK_0}{n}$$

Η εμπειρία έδειξε ότι η λύση με τη βοήθεια των οικονομικών πινάκων είναι προτιμότερη εκείνης των λογαρίθμων.

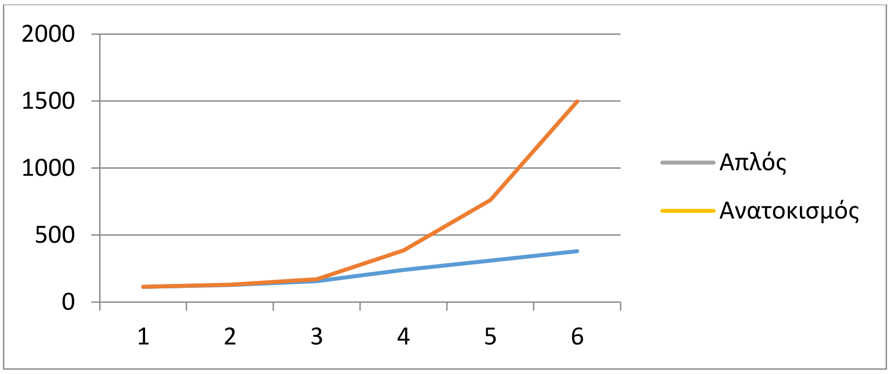
Η σύγκριση ανάμεσα στον απλό τόκο και στον ανατοκισμό αποτυπώνεται στον παρακάτω πίνακα, ο οποίος δείχνει τη γραμμική ανάπτυξη του χρήματος στον απλό τόκο και την εκθετική ανάπτυξη στον ανατοκισμό.

Πίνακας 4.1

Τοκοκεφάλαιο που παράγεται από €100				
Έτη	Ετήσιο επιτόκιο 3%		Ετήσιο επιτόκιο 7%	
η	Απλός	Ανατοκισμός	Απλός	Ανατοκισμός
2	106	106,1	114	114,5
4	112	112,6	128	131,1
8	124	126,7	156	171,9
20	160	180,6	240	386,9
30	190	242,8	310	761,2
40	220	326,2	380	1.497,40

Όλα τα παραπάνω φαίνονται καθαρά στο παρακάτω διάγραμμα το οποίο απεικονίζει τη συσσώρευση τοκοκεφαλαίου, όταν το αρχικό κεφάλαιο είναι €100 και το ετήσιο επιτόκιο 7%.

Διάγραμμα 4.1



Παράδειγμα 1

Ένα κεφάλαιο € 100.000 ανατοκίζεται για 8 χρόνια με επιτόκιο 6%. Να βρεθεί η τελική αξία του κεφαλαίου και ο τόκος που παράγεται.

Λύση

Τα δεδομένα του προβλήματος είναι: K_0 = 100.000, i = 6%, n = 8, K_n =? Αντικαθιστώντας στον τύπο του ανατοκισμού έχουμε:

K_8 = 100.000(1 + 0,06)^8 από τους πίνακες προκύπτει ότι (1,06)^8 = 1,5938

Άρα K_8 = 100.000*1,5938

και K_8 = 159.380.

ο τόκος που παράγεται είναι 159.380 – 100.000 = 59.380.

Παράδειγμα 2

Κεφάλαιο € 100.000 ανατοκίζεται κάθε τρίμηνο με τριμηνιαίο επιτόκιο 2%. Να βρεθεί το ποσό που θα συσσωρευτεί στην τράπεζα μετά από δώδεκα χρόνια.

Λύση

Αρχικά θα πρέπει να μετατρέψουμε τα χρόνια σε τρίμηνα. Δηλαδή, 12 x 4 = 48 τρίμηνα

Δεδομένα: K_0 = 100.000, n = 48, i = 2%, K_{12} = ?

K_{12} = 100.000 (1 + 0,02)^{48} = 100.000 x 2,58707039 => K_{12} = 258.070,4

Παράδειγμα 3

Ένα κεφάλαιο € 100.000 ανατοκίζεται για μια επταετία. Το επιτόκιο των τριών πρώτων χρόνων είναι 4% και 5% για τα επόμενα τέσσερα. Ποια είναι η τελική αξία του κεφαλαίου;

Λύση

K_2 = 100.000(1,04)^3

K_7 = K_2(1,05)^4 = 100.000(1,04)^3(1,05)^4 = 100.000 x 1,1248 x 1,2155 => K_7 = 136.719,44.

11.2 Εύρεση του K_n όταν ο Χρόνος Εκφράζεται με Κλασματικό Αριθμό Περιόδων.

Στα μέχρι τώρα προβλήματα, ο αριθμός των περιόδων ανατοκισμού ήταν ακέραιος αριθμός. Στην πράξη, όμως, πολλές φορές ένα αρχικό κεφάλαιο K_0 τοποθετείται με ανατοκισμό για έτη (n) και μήνες (μ) και το επιτόκιο είναι ετήσιο.

Τι κάνουμε σ' αυτή την περίπτωση; Έχουμε δυο μεθόδους που θα λύσουν το πρόβλημα.

Μέθοδος πρώτη: Γραμμική Συνθήκη.

Η μέθοδος αυτή εφαρμόζει **μικτό ανατοκισμό**, δηλαδή, ανατοκισμό για τις ακέραιες περιόδους και απλό τόκο για το κλάσμα της ακεραίας περιόδου. Αυτό μαθηματικά εκφράζεται ως εξής:

$$K_{n+\mu/12} = K_0(1+i)^n + K_0(1+i)^n\left(\mu/12\right) = \boldsymbol{K_0(1+i)^\nu\left(1+\mu i/12\right)} \quad (\mathbf{2})$$

Μέθοδος δεύτερη: Εκθετική Συνθήκη.

Σύμφωνα με αυτή τη μέθοδο ο ανατοκισμός συνεχίζεται και για το κλάσμα της χρονικής περιόδου, με ένα επιτόκιο ισοδύναμο του i. Δηλαδή, για την ακέραια περίοδο προκύπτει μια αξία $K_0 (1 + i)^n$ η οποία ανατοκίζεται για το κλάσμα της χρονικής περιόδου$(\mu/12)$ και έτσι υπολογίζεται η συνολική τελική αξία. Δηλαδή:

$$K_{n+\mu/12} = K_0(1+i)^{n+\mu/12}$$

Η τιμή της παράστασης $(1+i)^{n+\mu/12}$ δίδεται από τους οικονομικούς πίνακες του βιβλίου και για τα συνήθη επιτόκια κυμαίνεται από το 1/12 έως τα 11/12.

Παράδειγμα 4

Ένα κεφάλαιο € 100.000 κατατέθηκε σε μια τράπεζα με ετήσιο ανατοκισμό και ετήσιο επιτόκιο 8%, για 12 χρόνια και 6 μήνες. Ποια είναι η τελική του αξία;

Λύση

Δεδομένα: K_0 = 100.000, i = 0,08, n = 12 και 6/12, K_n = ;

α) Γραμμική συνθήκη.

$K_{12+6/12}$ = 100.000 (1 + 0,08 $)^{12}$ [1 + 6/12(0,08)]

= 100.000 (2,51817012)(1,04) => $K_{12+6/12}$ = 261.889,69.

β) Εκθετική συνθήκη.

$K_{12+6/12}$ = 100.000 (1 + 0,08 $)^{12+6/12}$

= 100.000 (1,08 $)^{12}$(1,08 $)^{6/12}$ από τους πίνακες βρίσκουμε ότι:

= 100.000 (2,51817012) (1,03923048) => $K_{12+6/12}$ = 261.695,91.

Όμως, αν σε μια συναλλαγή το επιτόκιο δεν είναι σύνηθες και επομένως δεν υπάρχει στους οικονομικούς πίνακες, τότε βρίσκουμε την τιμή του συντελεστή κεφαλαιοποίησης με τη **μέθοδο της παρεμβολής.** Στην ίδια μέθοδο θα καταφύγουμε αν μας ζητείται ο χρόνος ο οποίος είναι κλασματικός.

Παράδειγμα 5

Κεφάλαιο € 100.000 τοποθετείται με ετήσιο ανατοκισμό και επιτόκιο 8% για 10 χρόνια, ένα μήνα και 24 ημέρες. Ζητείται η τελική αξία του κεφαλαίου.

Λύση

Θα πρέπει να μετατρέψουμε τις ημέρες σε μήνες: 24/30 = 0,8 μήνες. Τα δεδομένα του προβλήματος είναι: K_0 = 100.000, i = 8%, n = 10 μ = 1,8/12

α) Γραμμική συνθήκη.

$K_{10+1,8/12}$ = 100.000 (1 + 0,08)^{10}(1 +1,8/12*0,08)

= 100.000 (2,158925)(1,012) => $K_{10+1,8/12}$ = 218.483,21.

β) Εκθετική συνθήκη.

$K_{10+1,8/12}$ = 100.000 (1 + 0,08)^{10}(1 + 0,08)$^{1,8/12}$ Η τιμή της παράστασης (1+0,08)$^{1,8/12}$ δεν υπάρχει στους πίνακες, παρεμβάλλεται όμως μεταξύ των (1, 08)$^{1/12}$ και (1, 08)$^{2/12}$. Λέμε, λοιπόν, ότι:

Η τιμή του (1, 08)$^{1/12}$ στους πίνακες είναι 1,00643403

Η τιμή του (1, 08)$^{2/12}$ στους πίνακες είναι 1,01290946

Αφαιρούμε τις δυο τιμές και βρίσκουμε μια διαφορά 0,00647543. Τι σημαίνει αυτός ο αριθμός;

Σημαίνει ότι αν αυξηθεί ο εκθέτης του διωνύμου κατά $\frac{1}{12}$ η διαφορά που θα προκύψει από τους πίνακες θα είναι 0,00647543. Συνεπώς:

Για αύξηση του εκθέτη κατά $\frac{1}{12}$ έχουμε αύξηση κατά 0,00647543

Για αύξηση του εκθέτη κατά 0,8/12 έχουμε αύξηση κατά x;

x = 0,00647543*0,8 = 0,005180344

Άρα, λοιπόν, το διώνυμο (1,08)$^{1,8/12}$ θα έχει τιμή, (1,08)$^{1/12}$ που ήδη την έχουμε και είναι 1,00643403, συν το υπόλοιπο 0,8 που βρήκαμε με τη μέθοδο της παρεμβολής, δηλαδή, 0,005180344.

(1,08)$^{1,8/12}$ = (1,00643403)+(0,005180344) = 1,011614374 και

$K_{10+1,8/12}$ = 100.000(1,00643403)(0,005180344) = 218.399,95.

Παράδειγμα 6

Μετά από πόσο χρόνο ένα κεφάλαιο € 100.000, που τοποθετήθηκε με ετήσιο ανατοκισμό και ετήσιο επιτόκιο 3% έγινε € 250.008;

Λύση

Δεδομένα: K_n = 250.008, K_0 = 100.000, i = 3%, n = ;

Λύνουμε τον βασικό τύπο του ανατοκισμού ως προς το διώνυμο και έχουμε:

$$K_n = K_0(1+i)^n => (1+i)^n = \frac{K_n}{K_0} = \frac{250.008}{100.000} = 2.50008$$

Αναζητούμε στους πίνακες την τιμή 2,50008 στη στήλη του επιτοκίου 3% και βρίσκουμε τον αριθμό στο έτος 31. Άρα, μετά από 31 χρόνια κεφάλαιο € 100.000 ανατοκιζόμενο με ετήσιο επιτόκιο 3%, θα γίνει € 250.008.

Παράδειγμα 7

Μετά από πόσο χρόνο ένα κεφάλαιο € 100.000, που τοποθετήθηκε με ετήσιο ανατοκισμό και ετήσιο επιτόκιο 3% έγινε € 145.550;

Λύση

Δεδομένα: $K_n = 145.550$, $K_0 = 100.000$, $i = 3\%$, $n = ;$

$$K_n = K_0(1+i)^n \Rightarrow (1+i)^n = \frac{K_n}{K_0} = \frac{145.550}{100.000} = 1.4555$$

Αναζητούμε στους πίνακες την τιμή 1,4555 στη στήλη του επιτοκίου 3% και διαπιστώνουμε ότι περιέχεται ανάμεσα στις τιμές 1,42576089 που αντιστοιχεί στην 12η περίοδο ανατοκισμού και την 1,46853371, τιμή της 13ης περιόδου. Στη συνέχεια εργαζόμαστε με τη μέθοδο της παρεμβολής ως εξής:

Για $(1,03)^{13}$ έχουμε τιμή από τους πίνακες 1,46853371 (α)

Για $(1,03)^{x}$ έχουμε τιμή από τους πίνακες 1,4555 (β)

Για $(1,03)^{12}$ έχουμε τιμή από τους πίνακες 1,42576089 (γ)

Αφαιρούμε την τιμή (γ) από την (α) και έχουμε:

1,46853371 – 1,42576089 = 0,04277282 ο αριθμός αυτός δείχνει τη διαφορά της τιμής από τους πίνακες για ένα έτος ή 360 ημέρες. Τώρα πρέπει να αφαιρέσουμε από την τιμή που μας προέκυψε από την άσκηση(β) την μικρότερη τιμή των πινάκων (γ).

1,4555 – 1,42576089 = 0,02973911. Τώρα μπορούμε να πούμε ότι:

Για αύξηση τιμών 0,04277282 έχουμε αύξηση χρόνου κατά 360 ημέρες

Για αύξηση τιμών 0,02973911 έχουμε αύξηση χρόνου κατά x; ημέρες

και $x = 360(\frac{0.02973911}{0.04277282}) = 250.3$ ημέρες ή 8 μήνες και 10 ημέρες.

Συνεπώς, ο χρόνος ανατοκισμού θα είναι 12 χρόνια 8 μήνες και 10 ημέρες.

Παράδειγμα 8

Με ποιο επιτόκιο κεφάλαιο € 100.000 που τοκίστηκε με ετήσιο ανατοκισμό, έγινε μετά από 25 χρόνια € 338.635;

Λύση

Έχουμε $K_0 = 100.000$, $K_{25} = 338.635$, $n = 25$, $i = ;$

$$K_n = K_0(1+i)^n \Rightarrow (1+i)^{25} = \frac{338.635}{100.000} = 3.38635$$

Αναζητούμε στους πίνακες τον αριθμό 3,38635 οριζόντια στην περίοδο n = 25 και τον συναντούμε στην κάθετη στήλη του επιτοκίου του 5%, που είναι και το ζητούμενο επιτόκιο.

Παράδειγμα 9

Με ποιο επιτόκιο κεφάλαιο € 100.000 που τοκίστηκε με ετήσιο ανατοκισμό, έγινε μετά από 18 χρόνια € 250.000;

Λύση

Έχουμε $K_0 = 100.000$, $K_{18} = 250.000$, $n = 18$, $i = ;$

$$K_n = K_0(1+i)^n => (1+i)^{18} = \frac{250.000}{100.000} = 2.5$$

Αναζητούμε στους πίνακες τον αριθμό 2,5 οριζόντια στην περίοδο n = 18 και διαπιστώνουμε ότι ο αριθμός δεν υπάρχει, αλλά βρίσκεται ανάμεσα στους αριθμούς 2,40661923 που αντιστοιχεί σε επιτόκιο 5% και τον αριθμό 2,62146627 που αντιστοιχεί σε επιτόκιο 5,5%. Άρα το επιτόκιο που αναζητούμε θα είναι 5% < x% < 5,5%.

Εργαζόμενοι με τη μέθοδο της παρεμβολής λέμε ότι:

Για $(1{,}05)^{18}$ έχουμε τιμή από τους πίνακες 2,40661923 (α)

Για $(1{,}xx)^{18}$ οι πίνακες πρέπει να δώσουν τιμή 2,5 (β)

Για$(1{,}055)^{18}$ έχουμε τιμή από τους πίνακες 2,62146627 (γ)

Αφαιρώντας την τιμή (α) από την (γ) και (β) από την (γ) έχουμε:
2,62146627 - 2,40661923 = 0,21527397
2,62146627 – 2,5 = 0,12146627
Για αύξηση τιμών πινάκων κατά 0,21527397 το i αυξάνει κατά 0,005

Για αύξηση τιμών πινάκων κατά 0,12146627 το i αυξάνει κατά x;

$$x = 0{,}005\left(\frac{0{,}12146627}{0{,}21527397}\right) = 0{,}00282$$

Άρα το ζητούμενο επιτόκιο θα είναι 0,05 + 0,00282 = 0,05282 ή 5,282%.

11.3 Εύρεση της Αρχικής Αξίας του Κεφαλαίου.

Για να βρούμε την **αρχική** ή την **παρούσα αξία** του κεφαλαίου K_0 θα χρησιμοποιήσουμε τον αρχικό (1) τύπο του ανατοκισμού και θα λύσουμε ως προς K_0.

$$K_n = K_0(1+i)^n => K_0 = \frac{K_n}{(1+i)^n} => \boldsymbol{K_0 = K_n \frac{1}{(1+i)^n}} \quad \textbf{(3)}$$

Το κλάσμα $\frac{1}{(1+i)^n}$ ονομάζεται **συντελεστής προεξόφλησης** και παριστάνει την παρούσα αξία μιας νομισματικής μονάδας που θα πληρωθεί μετά από n περιόδους, αποτελεί δε το αντίστροφο του συντελεστή κεφαλαιοποίησης. Η τιμή του κλάσματος δίδεται από στους οικονομικούς πίνακες στο τέλος του βιβλίου. Τα προβλήματα αυτής της ενότητας έχουν την εξής μορφή: Ποιο είναι το αρχικό κεφάλαιο K_0 που αν ανατοκιστεί επί n περιόδους με i επιτόκιο, θα δώσει τελικό κεφάλαιο K_n. Αν παραστήσουμε το συντελεστή προεξόφλησης με το U^n, τότε ο παραπάνω τύπος θα γίνει:

$K_0 = K_n . U^n$ (4)

Στην περίπτωση που ο χρόνος σε κάποιο πρόβλημα δεν είναι ακέραιος αριθμός αλλά κλάσμα τότε ο τύπος της αρχικής αξίας του κεφαλαίου, από τον τύπο της εκθετικής συνθήκης $K_{n+\frac{\mu}{12}} = K_0(1+i)^{n+\frac{\mu}{12}}$ γίνεται:

$$\boldsymbol{K_0 = \frac{K_{n+\frac{\mu}{12}}}{(1+i)^n(1+i)^{\frac{\mu}{12}}}} \quad \textbf{(5)}$$

και της γραμμικής συνθήκης $K_{n+\frac{\mu}{12}} = K_0(1+i)(1+\frac{\mu}{12}i)$ γίνεται:

$$\mathbf{K_0 = K_n \frac{\mu}{12} \left(\frac{1}{(1+i)^n}\right) \left(\frac{1}{\left(1+i\frac{\mu}{12}\right)}\right)} \quad \mathbf{(6)}$$

Παράδειγμα 10

Ένα κεφάλαιο τοκίστηκε με ετήσιο ανατοκισμό και ετήσιο επιτόκιο 3,5% για 12 χρόνια και έγινε με τους τόκους του € 100.000. Ποιο ήταν αυτό το κεφάλαιο;

Λύση

Ως δεδομένα έχουμε: K_n = 100.000, i = 0,035, n = 12, K_0 = ;

Αντικαθιστούμε στον τύπο (3) και έχουμε:

$K_0 = 100.000 * \frac{1}{(1+0,035)^{12}}$ από τους πίνακες προκύπτει ότι η τιμή του κλάσματος είναι 0,661783.

Άρα, K_0 = 100.000*0,661783 = € 66.178,3.

Παράδειγμα 11

Ποιο κεφάλαιο τοκίστηκε με τριμηνιαίο ανατοκισμό και με επιτόκιο 2,7% ανά τρίμηνο για 10 χρόνια και έγινε με τους τόκους του € 60.000;

Λύση

K_n = 60.000, i = 2,7% κατά τρίμηνο, n = 10 χρόνια, K_0 = ;

Αρχικά θα μετατρέψουμε τα χρόνια σε περιόδους ανατοκισμού, δηλαδή σε τρίμηνα, οπότε: n = 10 x 4 = 40 τρίμηνα. Όπως και στο προηγούμενο πρόβλημα, αντικαθιστούμε τα δεδομένα στο τύπο (3) όπου παίρνουμε:

$K_0 = 60.000 * \frac{1}{(1+0,027)^{40}}$ κοιτώντας στους πίνακες διαπιστώνουμε πως το επιτόκιο 2,7% παρεμβάλλεται ανάμεσα στο επιτόκιο του 2,5% και εκείνο του 3%. Άρα την τιμή της παράστασης $\frac{1}{(1+0,027)^{40}}$ θα τη βρούμε με τη γνωστή μέθοδο της παρεμβολής. Για τις 40, λοιπόν, περιόδους ισχύει:

Για επιτόκιο 0,003 η τιμή των πινάκων είναι 0,3065 (α)

Για επιτόκιο 0,0025 η τιμή των πινάκων είναι 0,3724 (β)

<u>Για επιτόκιο 0,0027 η τιμή των πινάκων θα είναι x;</u>

Αφαιρούμε την (α) από τη (β) και βρίσκουμε 0,0659, οπότε λέμε:

Αν αυξηθεί το i κατά 0,005 μειώνονται οι τιμές κατά 0,0659

<u>Αν αυξηθεί το i κατά 0,002 μειώνονται οι τιμές κατά x;</u>

$x = 0,0659 * \frac{0,002}{0,005} = 0,02636$

Επομένως το κλάσμα: $\frac{1}{(1+0,027)^{40}}$ = 0,3724 – 0,02636 = 0,34604

Έτσι, λοιπόν, η αρχική αξία του κεφαλαίου είναι:

K_0 = 60.000 * 0,34604 = € 20.762,4.

Παράδειγμα 12

Ένας έμπορος οφείλει σε έναν προμηθευτή του € 100.000 που πρέπει να εξοφλήσει μετά από 2 χρόνια και 4 μήνες. Αν ο έμπορος αποφασίσει να εξοφλήσει σήμερα το χρέος του και δεδομένου ότι ισχύει ετήσιος ανατοκισμός με ετήσιο επιτόκιο 3%, τι ποσό πρέπει να πληρώσει;

Λύση

Το πρόβλημα έχει δυο τρόπους λύσης, είτε με τη γραμμική, είτε με την εκθετική συνθήκη. Η μετατροπή των τεσσάρων μηνών σε έτη είναι $\frac{3}{12}$.

α) Με τη γραμμική συνθήκη, αντικαθιστούμε στον τύπο (6) και έχουμε:

$$K_0 = K_{n+\mu/12}\left(\frac{1}{(1+i)^n}\right)\left(\frac{1}{(1+i\,\mu/12)}\right) => K_0 = 100.000\left(\frac{1}{(1{,}03)^2}\right)\left(\frac{1}{1{,}03\,3/12}\right) =>$$

$$=> 100.000(0{,}9425)0{,}9925 => K_0 = 93.543{,}12$$

β) και με την εκθετική συνθήκη, αντικαθιστώντας στον τύπο (5) προκύπτει:

$$K_0 = \frac{K_{n+\mu/12}}{(1+i)^n(1+i)^{\mu/12}} => K_0 = 100.000(\frac{1}{(1{,}03)^2}\left(\frac{1}{(1{,}03)^{\frac{3}{12}}}\right) =>$$

$$=> K_0 = 100.000(0{,}9425)(1{,}0074) => K_0 = 94.937{,}37$$

Παράδειγμα 13

Μετά από πόσο χρόνο διπλασιάζεται ένα κεφάλαιο που ανατοκίζεται με ετήσιο επιτόκιο 5%;

Λύση

Σύμφωνα με την άσκηση θα πρέπει να ισχύει:

$K_0(1 + 0{,}05)^n = 2K_0$ και απλοποιώντας $(1{,}05)^n = 2$

Από τους οικονομικούς πίνακες και στη στήλη του επιτοκίου 5% βρίσκουμε ότι, (1,05)14 = 1,9799 και (1,05)15 = 2,0789. Δηλαδή: 1,9799 < 2 < 2,0789. Εφαρμόζοντας τη μέθοδο της παρεμβολής έχουμε:

Για 360 ημέρες η διαφορά από τους πίνακες είναι 0,099

<u>Για x; ημέρες η διαφορά από τους πίνακες είναι 0,0201</u>

x = 360(0,0201)/ 0,099 = 73,09 ημέρες

Άρα, το κεφάλαιο με 5% ανατοκισμό διπλασιάζεται μετά από 14 χρόνια και 73 ημέρες ή 14 χρόνια, 2 μήνες και 13 ημέρες.

11.4 Η Προεξόφληση στον Ανατοκισμό.

Στο δεύτερο κεφάλαιο έγινε αναφορά για την προεξόφληση με απλό τόκο. Εκεί έγινε γνωστό ότι το προεξόφλημα είναι η διαφορά ανάμεσα στην ονομαστική και την παρούσα αξία ενός γραμματίου. Τα ίδια ισχύουν και στον ανατοκισμό. Την παρούσα αξία στον ανατοκισμό τη συμβολίζουμε με το K_0 και την ονομαστική αξία με το K_n. Άρα, σύμφωνα με τον ορισμό της προεξόφλησης θα ισχύει:

$$E = K_n - K_0 => E = K_n - K_0\left(\frac{1}{(1+i)^n}\right) => \boldsymbol{E} = \boldsymbol{K_n}\left(\mathbf{1} - \frac{\mathbf{1}}{(\mathbf{1}+\boldsymbol{i})^{\boldsymbol{n}}}\right) \qquad (\mathbf{7})$$

Σημείωση: *Στον ανατοκισμό εφαρμόζουμε μόνο <u>εσωτερική</u> προεξόφληση, ενώ στις βραχυπρόθεσμες συναλλαγές εφαρμόζεται κυρίως εξωτερική προεξόφληση.*

Παράδειγμα 14

Ζητείται η παρούσα αξία και το προεξόφλημα συναλλαγματικής ονομαστικής αξίας € 100.000 που προεξοφλήθηκε 3 χρόνια πριν τη λήξη της με ετήσιο επιτόκιο 4%.

Λύση

K_0 = ;, E = ;, K_n = 100.000, n = 3, i = 4%. Αντικαθιστώντας στους τύπους (3) και (7) και με τη βοήθεια των πινάκων, έχουμε:

$K_0 = K_n \frac{1}{(1+i)^n}$ = 100.000*0,8889 = 88.890.

$E = K_n(1 - \frac{1}{(1+i)^n})$ = 100.000*(1 – 0,8889) = 11.110.

Ενώ με απλό τόκο και εξωτερική προεξόφληση θα ήταν:

E = Kni = 100.000(3)0,04 = 12.000 και

Π = K – E = 100.000 – 12.000 = 88.000.

11.5 Η Ισοδυναμία στον Ανατοκισμό

Δυο κεφάλαια λέγονται ισοδύναμα, αν σε κάποια στιγμή, με το ίδιο επιτόκιο και με την ίδια μέθοδο προεξόφλησης, έχουν την ίδια παρούσα αξία.

Άρα στον ανατοκισμό θα είναι $K_{01} = K_{02}$ ή

$$\boldsymbol{K_1 \frac{1}{(1+i)^{n_1}} = K_2 \frac{1}{(1+i)^{n_2}}} \qquad (\mathbf{8})$$

Βέβαια, ο τύπος (8) μπορεί να επεκταθεί σε όλες τις περιπτώσεις αντικατάστασης παλαιών υποχρεώσεων με νέες. Αν, για παράδειγμα, έχουμε K_1, K_2, …, K_ν κεφάλαια που λήγουν μετά από n_1, n_2, …, n_ν περιόδους τα οποία αντικαθιστούν ένα κεφάλαιο K λήξης n περιόδων και προεξοφλούνται με κοινό επιτόκιο i, τότε για να υπάρχει ισοδυναμία , θα έχουμε:

α) Εποχή ισοδυναμίας ή ημέρα υπολογισμού.

$$\boldsymbol{K_n \frac{1}{(1+i)^n} = K_1 \frac{1}{(1+i)^{n_1}} + K_2 \frac{1}{(1+i)^{n_2}} + \cdots + K_\nu \frac{1}{(1+i)^{n_\nu}}} \qquad (\mathbf{9})$$

β) Εποχή ισοδυναμίας η κοινή λήξη.

$$\boldsymbol{K_n = K_1 \frac{1}{(1+i)^{n_1-n}} + K_2 \frac{1}{(1+i)^{n_2-n}} + \cdots + K_\nu \frac{1}{(1+i)^{n_\nu-n}}} \qquad (\mathbf{10})$$

Αν τα n_1, n_2, …, n_ν > n τότε οι διαφορές στον παρονομαστή του διώνυμου θα είναι θετικές και θα υπάρχουν αφαιρετικοί τόκοι, δηλαδή, ο αντίστοιχος όρος θα παριστάνει την παρούσα αξία του κεφαλαίου στον ανατοκισμό.

Αν τα n_1, n_2, …, n_ν < n τότε οι διαφορές στον παρονομαστή του διώνυμου θα είναι αρνητικές και θα υπάρχουν προσθετικοί τόκοι, δηλαδή, ο αντίστοιχος όρος θα παριστάνει την τελική αξία του κεφαλαίου στον ανατοκισμό.

Αν στις παραπάνω σχέσεις (9) και (10) έχουμε το ίδιο επιτόκιο, τότε οι σχέσεις δε διαφέρουν μεταξύ τους, επειδή, αν πολλαπλασιάσουμε και τα δυο μέλη της σχέσης (9) με το $(1 + i)^n$ θα πάρουμε την σχέση (10).

Άρα, η ισοδυναμία στον ανατοκισμό με ίδιο επιτόκιο είναι **διαρκής**.

Παράδειγμα 15

Γραμμάτιο K_1 = 100.000 που λήγει σε 3 χρόνια από σήμερα και ένα άλλο γραμμάτιο K_2 = 300.000 που λήγει μετά από 8 χρόνια, αντικαθίστανται από ένα νέο γραμμάτιο K που λήγει σε 4 χρόνια από σήμερα. Ποια θα είναι η τιμή του νέου γραμματίου αν το επιτόκιο του ανατοκισμού είναι 3%;

Λύση

K_1 = 100.000, n_1 = 3, K_2 = 300.000, n_2 = 8, K = ; n = 4, i = 3% Αντικαθιστούμε στη σχέση (9) και από τους πίνακες έχουμε:

$K_3\frac{1}{(1,03)^4}$ = 100.000$\frac{1}{(1,03)^3}$ + 300.000$\frac{1}{(1,03)^8}$ =>K_3(0,8884) = 100.000(0,9151) + 300.000(0,7894)=

=>K_3*0,8884 = 91.510 + 236.820 => K_3 = 369.574,5.

Παράδειγμα 16

Ένας έμπορος οφείλει τρία γραμμάτια, το πρώτο αξίας € 80.000 που λήγει μετά ένα χρόνο, το δεύτερο αξίας € 140.000 και λήξης ύστερα από τέσσερα χρόνια και ένα τρίτο αξίας € 60.000 που λήγει μετά πέντε χρόνια. Τι ποσό πρέπει να πληρώσει μετά από δυο χρόνια από σήμερα, αν έχουμε ετήσιο ανατοκισμό και ετήσιο επιτόκιο 5%;

Λύση

α) <u>Εποχή ισοδυναμίας η ημέρα υπολογισμού.</u>
Εφαρμόζουμε τη σχέση (9) και με τη βοήθεια των πινάκων έχουμε:

$K_4\frac{1}{(1,05)^2}$ = 80.000$\frac{1}{(1,05)^1}$ + 140.000$\frac{1}{(1,05)^4}$ + 60.000$\frac{1}{(1,05)^5}$ =>

=>K_4(0,9070) = 80.000(0,9523) + 140.000(0,8227) + 60.000(0,7835) =>
=>K_4(0,9070) = 238.372 => K_4 = 262.813,67.

β) <u>Εποχή ισοδυναμίας η κοινή λήξη</u>.
Εφαρμόζουμε τη σχέση (10) και με τη βοήθεια των πινάκων έχουμε:
K_4 = 80.000$\frac{1}{(1,05)^{1-2}}$ + 140.000$\frac{1}{(1,05)^{4-2}}$ + 60.000$\frac{1}{(1,05)^{5-2}}$ =>
K_4 = 80.000$(1,05)^1$ + 140.000$\frac{1}{(1,05)^2}$ + 60.000$\frac{1}{(1,05)^3}$ =>
K_4 = 80.000(1,05) + 140.000(0,9070) + 60.000(0,8638) => K_4 = 262.808.

Παρατηρούμε ότι και με τις δυο μεθόδους το αποτέλεσμα παραμένει το ίδιο εξ αιτίας του ότι, όπως είπαμε παραπάνω, η ισοδυναμία είναι διαρκής.

11.6 Ανάλογα και Ισοδύναμα Επιτόκια

Στην περίπτωση του απλού τόκου το κεφάλαιο παραμένει σταθερό σε όλες τις περιόδους τοκισμού, επειδή ο τόκος κάθε περιόδου <u>δεν κεφαλαιοποιείται</u>. Στο τέλος των περιόδων τοκισμού συσσωρεύεται ένα κεφάλαιο αυξημένο κατά τους τόκους του, που το ονομάζουμε τελική αξία κεφαλαίου. Το ποσό αυτό θα μένει πάντοτε σταθερό ακόμα και αν μεταβληθεί η χρονική περίοδος παραγωγής τόκου, αρκεί να εφαρμόζουμε κάθε φορά το <u>ανάλογο επιτόκιο</u>. Ας δούμε ένα παράδειγμα:

Ένα κεφάλαιο € 100.000 τοκίζεται με απλό τόκο και ετήσιο επιτόκιο 6% για πέντε χρόνια. Η τελική του αξία θα είναι:

α) Αν η περίοδος τοκισμού είναι το έτος:
$K_n = K_0 + K_0ni$ = 100.000 + 100.000(5)0,06 = 130.000.

β) Αν η περίοδος τοκισμού είναι το εξάμηνο:
$K_n = K_0 + K_0ni$ = 100.000 + 100.000(10)0,03 = 130.000 (όπου n = 2(5) = 10 εξάμηνα και i = 0,06/2 = 0,03 εξαμηνιαίο).

γ) Αν η περίοδος τοκισμού είναι ο μήνας:
$K_n = K_0 + K_0ni$ = 100.000 + 100.000(60)0,005 = 130.000 (όπου n = 12(5) = 60 μήνες και i = 0,06/12 = 0,005 μηνιαίο).

Παρατηρούμε ότι η τελική αξία K_n παραμένει σταθερή στο ποσό των € 130.000. Τα επιτόκια των διαφόρων περιόδων που έχουν τον ίδιο λόγο, όπως και οι περίοδοι στις οποίες αντιστοιχούν, ονομάζονται ανάλογα.

Όμως, στον ανατοκισμό δεν συμβαίνει κάτι αντίστοιχο. Τα ανάλογα, δηλαδή, επιτόκια δεν δίνουν σε ένα κεφάλαιο την ίδια τελική αξία για την ίδια περίοδο τοκισμού.

Γιατί;

Διότι, στον ανατοκισμό ο τόκος της περιόδου κεφαλαιοποιείται και στην επόμενη περίοδο αποδίδει και αυτός τόκο. Ας ξαναδούμε το προηγούμενο παράδειγμα, εφαρμόζοντας τον τύπο του ανατοκισμού.

α) Αν η περίοδος τοκισμού είναι το έτος:
$K_n = K_0 (1 + i)^n$= 100.000 $(1,06)^5$= 133.822.

β) Αν η περίοδος τοκισμού είναι το εξάμηνο:

$K_n = K_0 (1 + i)^n$ = 100.000 $(1,03)^{10}$= 134.391 (όπου n = 2(5) = 10 εξάμηνα και i = 0,06/2 = 0,03 εξαμηνιαίο).

Εδώ, παρατηρούμε δυο πράγματα: το πρώτο είναι η απόδειξη ότι η τελική αξία δεν είναι σταθερό ποσό και η δεύτερη παρατήρηση είναι ότι όσο περισσότερες είναι οι υποδιαιρέσεις του επιτοκίου και των περιόδων που γίνεται ο ανατοκισμός, τόσο μεγαλύτερη είναι η τελική αξία του κεφαλαίου.

Άρα, στον ανατοκισμό το πρόβλημα που αντιμετωπίζουμε διατυπώνεται ως εξής: ένα κεφάλαιο € 100.000 με ποιο επιτόκιο πρέπει να ανατοκιστεί επί 12 εξάμηνα για να μας δώσει τελική αξία ίση με την τελική αξία που θα έδινε το ίδιο αρχικό κεφάλαιο (€ 100.000) αν ανατοκίζονταν επί 6 χρόνια (δηλαδή, για το ίδιο χρονικό διάστημα) με 10%;

Αν συμβολίσουμε με x το άγνωστο επιτόκιο θα πρέπει να ισχύει:

$100.000(1 + x)^{12} = 100.000(1,10)^6$ =>

$(1 + x)^{12} = (1,10)^6 = 1,7715$ και $(1 + x) = (1,7715)^{\frac{1}{12}} = 1,0488$

1 + x = 1,0488 και x = 1,0488 – 1 = 0,0488 ή 4,88%.

Συνεπώς, το ετήσιο επιτόκιο 10% και το εξαμηνιαίο 4,88% είναι ισοδύναμα. Επομένως:

Δυο επιτόκια θεωρούνται ισοδύναμα αν αντιστοιχούν σε διαφορετικές περιόδους ανατοκισμού και δίνουν το ίδιο τελικό κεφάλαιο για το ίδιο (αρχικό) κεφάλαιο, που ανατοκίζεται στο ίδιο χρονικό διάστημα.

Αν παραστήσουμε το ισοδύναμο επιτόκιο με το J_μ, η σχέση που θα προκύψει θα είναι η εξής:

$(1 + J_\mu)^\mu = 1 + i$ και λύνοντας ως προς $\mathbf{i = (1 + J_\mu)^\mu - 1}$ **(11)**

και λύνοντας ως προς $\mathbf{J_\mu = (1 + i)^{\frac{1}{\mu}} - 1}$ **(12)**

Το **i** ονομάζεται **πραγματικό επιτόκιο** ενώ το γινόμενο $\mathbf{J_\mu = i_\mu \cdot \mu}$ είναι το **ονομαστικό επιτόκιο.** Είναι, δηλαδή,

$$\mathbf{J_\mu = \mu \cdot \{(1 + i)^{\frac{1}{\mu}}\} - 1} \qquad \mathbf{(13)}$$

Παράδειγμα 17

Αν το ετήσιο πραγματικό επιτόκιο είναι 8%, να βρεθεί το τριμηνιαίο ανάλογο και ισοδύναμο.

Λύση

Το ανάλογο τριμηνιαίο επιτόκιο είναι $\frac{0{,}08}{4}$ = 0,02 ή 2%.

Για να βρεθεί το ισοδύναμο τριμηνιαίο θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο (12), όπου μετά την αντικατάσταση έχουμε:

$J_\mu = (1+0{,}08)^{\frac{1}{4}} - 1$ μετατρέποντας τον δείκτη $\frac{1}{4}$ σε δωδέκατα για να είναι εύκολη η εύρεσή του από τους οικονομικούς πίνακες, θα δούμε ότι το διώνυμο παίρνει τιμή $(1{,}08)^{\frac{3}{12}}$ = 1,0194 άρα

J_4 = 1,0194 — 1 = 0,0194 ή J_4 = 1,94%.

Παράδειγμα 18

Αν το τριμηνιαίο πραγματικό επιτόκιο είναι 4%, τότε ποιο είναι το ανάλογο και το ισοδύναμο τετραμηνιαίο;

Λύση

Το ανάλογο τετραμηνιαίο επιτόκιο είναι $0{,}04 \cdot \frac{4}{3}$ = 5,333%.

Το ισοδύναμο τετραμηνιαίο επιτόκιο θα είναι:

$J_{\frac{1}{3}} = (1+0{,}04)^{\frac{1}{\frac{1}{3}}} - 1 = (1{,}04)^3 - 1 = 1{,}1248 - 1 = 0{,}1248$ ή 12,48%

Παράδειγμα 19

Αν το ισοδύναμο εξαμηνιαίο επιτόκιο είναι 3%, ποιο είναι το ετήσιο πραγματικό επιτόκιο;

Λύση

Χρησιμοποιούμε τον τύπο (11) και με την βοήθεια των οικονομικών πινάκων έχουμε:

$i = (1 + J_\mu)^\mu - 1 \Rightarrow i = (1+0{,}03)^{\frac{1}{\frac{1}{2}}} - 1 = (1{,}03)^2 - 1 = 1{,}0609 - 1 = 0{,}0609$ ή 6,09%.

11.7 Καθαρή Παρούσα Αξία.

Η διαφορά της τρέχουσας (παρούσας) αξίας μιας επένδυσης από το τρέχον κόστος της ονομάζεται Καθαρή Παρούσα Αξία (Κ.Π.Α.). Με άλλα λόγια, η Κ.Π.Α. μιας επένδυσης υπολογίζεται με τη διαφορά των παρουσών αξιών, στο χρόνο μηδέν, των εισροών και εκροών της εν λόγου επένδυσης. Οι επενδυτικές προτάσεις που έχουν θετική Κ.Π.Α. γίνονται αποδεκτές. Αντίθετα, εάν Κ.Π.Α. είναι αρνητική η επένδυση πρέπει να απορριφθεί.

Επιπλέον, χρηματοοικονομικός στόχος της πλειοψηφίας των μάνατζερ είναι η μεγιστοποίηση της Κ.Π.Α. καθώς αυτή συνδέεται με τη μεγιστοποίηση του οφέλους των μετόχων. Συνεπώς, στην περίπτωση δυο επενδύσεων που αποκλείονται αμοιβαία, όπου Κ.Π.Α.$_1$ η Καθαρή Παρούσα Αξία της επένδυσης 1 και Κ.Π.Α.$_2$ η Καθαρή Παρούσα Αξία της επένδυσης 2, αν Κ.Π.Α.$_1$ > Κ.Π.Α.$_2$ πρέπει να προτιμηθεί η επένδυση

Ο τύπος υπολογισμού της Κ.Π.Α. είναι:

$$\text{Κ.Π.Α.} = \frac{K_1}{1+i} + \frac{K_2}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{K_t}{(1+i)^t} - C$$

Όπου K_1, K_2, …K_t οι εισροές της επένδυσης και C αντίστοιχο κόστος. Να σημειωθεί ότι στην περίπτωση που το κόστος δεν αναφέρεται στο χρόνο μηδέν τότε θα πρέπει να γίνουν οι απαραίτητες προεξοφλήσεις ή ανατοκισμοί για τον προσδιορισμό της αξίας του στο έτος μηδέν.

Παράδειγμα 20

Μια επένδυση απαιτεί αρχική δαπάνη 1.000 ευρώ. Οι εισροές της επένδυσης θα είναι 700 ευρώ το επόμενο έτος και 800 ευρώ το μεθεπόμενο. Να βρεθεί η καθαρή παρούσα αξία της επένδυσης όταν το επιτόκιο της αγοράς είναι 15 %.

Λύση

$$\text{Κ.Π.Α.} = \frac{K_1}{1+i} + \frac{K_2}{(1+i)^2} - C \Leftrightarrow \text{Κ.Π.Α.} = \frac{700}{1{,}15} + \frac{800}{(1{,}15)^2} - 1.000 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \text{Κ.Π.Α.} = 608{,}7 + 604{,}9 - 1.000 = 213{,}6 > 0$$

Η καθαρή παρούσα αξία είναι θετική και συνεπώς η επένδυση είναι συμφέρουσα.

Παράδειγμα 21

Έστω οι παρακάτω χρηματορροές (εισροές, εκροές) μιας επενδυτικής πρότασης. Να προσδιοριστεί η Κ.Π.Α. Το επιτόκιο της αγοράς είναι 10%.

Έτος t	Χρηματορoές (Εκροές - Εισροές)
-1	-1.000
0	-2.000
1	1.200
2	1.500
3	2.000

Λύση

Για τον υπολογισμό της Κ.Π.Α. είναι απαραίτητο να προσδιοριστεί η παρούσα αξία σε όλες τις χρηματορροές. Παρατηρούμε ότι οι εκροές αρχίζουν στο έτος -1 γεγονός που ερμηνεύεται από τη φύση της επένδυσης, για παράδειγμα εάν η επένδυση αφορά την κατασκευή κτηριακών υποδομών τότε η περίοδος κόστους δύναται να έχει ξεκινήσει ένα (ή και περισσότερα) έτος πριν την έναρξη λειτουργίας της επιχείρησης.

$$\text{Κ.Π.Α.} = \frac{K_1}{1+i} + \frac{K_2}{(1+i)^2} + \frac{K_3}{(1+i)^3} - C_0 - C_1(1+i) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \text{Κ.Π.Α.} = \frac{1.200}{1{,}10} + \frac{1.500}{(1{,}10)^2} + \frac{2.000}{(1{,}10)^3} - 2.000 - (1000 * 1.10) = 733{,}21$$

Η επενδυτική πρόταση γίνεται αποδεκτή καθώς η Κ.Π.Α.>0 είναι θετική, η παρούσα αξία των εισροών είναι μεγαλύτερη από την παρούσα αξία των εκροών.

Έτος t	Χρηματορoές (Εκροές - Εισροές)	Προεξοφλημένες με επιτόκιο 10% Εκροές - Εισροές
-1	-1.000	-1.100,00
0	-2.000	-2.000,00
1	1.200	1.090,91
2	1.500	1.239,67
3	2.000	1.502,63
Σύνολα		733,21

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΝΔΕΚΑΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

ΑΝΑΤΟΚΙΣΜΟΣ

Άσκηση 1.

Να βρεθεί η τελική αξία κεφαλαίου 220.000€ που τοκίστηκε με ανατοκισμό προς 6% για 5 έτη, 2 μήνες και 12 ημέρες, όταν ο ανατοκισμός γίνεται κατ΄ έτος.

Λύση

Αρχικά θα πρέπει να μετατρέψουμε τις ημέρες σε δεκαδικό μηνών και στη συνέχεια τους μήνες σε δεκαδικό ετών. Δηλαδή:
12/30 = 0,4 και οι μήνες 2,4/12 = 0,2 έτη, άρα το κεφάλαιο τοκίστηκε επί 5,2 έτη.
Αντικαθιστώντας στον τύπο έχουμε: $K_n = K_0(1+i)^n \Rightarrow K_n = 220.000(1,06)^{5,2}$
Το $(1,06)^{5,2}$ βρίσκεται ανάμεσα στο $(1,06)^5$ και το $(1,06)^6$. Από τους πίνακες βρίσκουμε πως $(1,06)^5 = 1,3382$ και $(1,06)^6 = 1,4185$. Άρα:

Σε για 1 έτος η διαφορά στους πίνακες είναι 0,0803
Για 0,2 έτος η διαφορά στους πίνακες είναι x;
x = 0,0803(0,2) = 0,01606

άρα το $(1,06)^{5,2}$ είναι 1,3382 + 0,01606 = 1,35426. Και
*K_n = 220.000*1,35426 = 297.937,2€*

Άσκηση 2.

Κεφάλαιο 45.000€ τοκίστηκε με ανατοκισμό και έπειτα από 14 έτη έγινε με τους τόκους του 77.000€. Με ποιο επιτόκιο έγινε ο ανατοκισμός;

Λύση

Με αντικατάσταση στον τύπο έχουμε: $77.000 = 45.000(1+i)^{14}$ και λύνοντας ως προς το διώνυμο έχουμε: $(1+i)^{14} = 1,7111$.

Ερευνώντας τους πίνακες στη σειρά των 14 ετών βρίσκουμε ότι το επιτόκιο του 3,75% = 1,6743 και του 4% = 1,7316, δηλαδή το ζητούμενο επιτόκιο του 1,7111 θα βρίσκεται κάπου παραπάνω από 3,75% ή κάτι λιγότερο από 4%. Δηλαδή:

Για διαφορά επιτοκίου 0,0025 οι πίνακες διαφέρουν κατά 0,0573

Για διαφορά επιτοκίου x; οι πίνακες διαφέρουν κατά 0,0368

x = 0,0025(0,0368)/0,0573 = 0,0016

άρα το επιτόκιο είναι 0,0375 + 0,0016 = 0,0391 ή 3,91%.

Άσκηση 3.

Σε πόσο χρόνο ένα κεφάλαιο, που τοκίζεται με 3,5% με ανατοκισμό, θα διπλασιαστεί;

Λύση

$K_n = K_0(1+i)^n \Rightarrow 2K = K(1,035)^n \Rightarrow (1,035)^n = 2$.

Πηγαίνουμε στους πίνακες που δίνουν την τελική αξία μιας νομισματικής μονάδας μετά από n περιόδους ανατοκισμού και βρίσκουμε στο επιτόκιο του 3,5% που ισούται με 2.

Παρατηρούμε ότι το 2 βρίσκεται ανάμεσα στην $20^{η}$ περίοδο με 1,9897 και την $21^{η}$ με 2,0594. Άρα

Για διαφορά 1 έτους ή 360 ημερών η διαφορά των πινάκων είναι 0,0697

Για διαφορά πόσων x; ημερών η διαφορά των πινάκων είναι 0,0103

x = 360*0,0103/0,0697 = 53 ημέρες.

Δηλαδή μετά από 20 έτη και 53 ημέρες ή 20 έτη 1 μήνας και 23 ημέρες.

Άσκηση 4.

Ποιο κεφάλαιο τοκίστηκε με ανατοκισμό προς 4% επί 8 έτη, 9 μήνες και 14 ημέρες έγινε με τους τόκους του 21.000€;

Λύση

Αρχικά μετατρέπουμε τις ημέρες σε μήνες και στη συνέχεια τους μήνες σε έτη:

14 ημέρες/30 = 0,466 μήνες και 9,466/12 = 0,7888 έτη. Άρα το ποσό τοκίστηκε επί 8,7888 έτη με 4%. Ο χρόνος των 8,7888 ετών βρίσκεται ανάμεσα στα 8 και 9 έτη και από τους πίνακες βρίσκουμε ότι με 4% τα έτη: 8 = 1,3685 και 9 = 1,4233. Επομένως:

Για διαφορά 1 έτους η διαφορά στους πίνακες είναι (1,4233 – 1,3685) 0,0548

Για διαφορά 0,7888 του έτους η διαφορά θα είναι x;

x = 0,0548 x 0,7888 = 0,0432

Δηλαδή, 1,3685 + 0,0432 = 1,4117 και

$$K_0 = \frac{K_n}{(1+i)^n} => K_0 = \frac{21.000}{(1{,}04)^{8{,}788}} => K_0 = \frac{21.000}{1{,}4117} => K_0 = 14.876$$